استعد لبكالوريا 2025

الموضوع رقم03

نهائي علوم تجريبية
الأستاذ: محمد علالو

➢ التمرين الأول (04 نقاط) :

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية، مع التبرير:

1) نعتبر الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالشكل : $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-3e^{x}+2$

على المجال $[0;\ln 2]$ ، الدالة f :

أ) متناقصة تماما ، ب) متزايدة تماما ، جـ) غير رتيبة

2) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بــ : $g(x)=\cos x$ ، القيمة المتوسطة m للدالة g على المجال $\left[\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}\right]$

تساوي : أ) $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$ ، ب) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$ ، جـ) $-\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$

3) لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها 2 و حدها الأول u_0 ، حيث : $u_0=1$

من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $S_n=e^{u_0}\times e^{u_1}\times\ldots\times e^{u_n}$

S_n يساوي : أ) $e^{2(n+1)}$ ، ب) $e^{(n+1)^2}$ ، جـ) e^{n^2+1}

4) يحتوي وعاء على 6كريات سوداء و4 كريات بيضاء ، نسحب منه 5 كريات على التوالي مع الإرجاع

احتمال الحدث A : "سحب 3 كريات سوداء و كريتين بيضاوين " ، هو :

أ) $P(A)=\frac{10}{21}$ ، ب) $P(A)=\frac{1}{21}$ ، جـ) $P(A)=\frac{216}{625}$

➢ التمرين الثاني(05 نقاط) :

(u_n) متتالية عددية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـحدها الأول u_0 بحيث :

$u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1}=\frac{u_n-1}{u_n+3}$

1) عين العددان الحقيقيان a و b بحيث من اجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1}=a+\frac{b}{u_n+3}$

2) برهن بالتراجع ،انه من أجل كل عدد طبيعي n : $-1<u_n\le 0$

3) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أن (u_n) متقاربة

4) (v_n) متتالية معرفة في المجموعة $\mathbb{N}$ بــ : $v_n=\frac{1}{u_n+1}$

أ. بين أن (v_n) متتالية حسابية ،عين أساسها و حدها الأول

ب. عين v_n ثم u_n بدلالة n ، استنتج ثانية أن (u_n) متقاربة

5) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=u_0v_0+u_1v_1+\ldots+u_nv_n$ و $T_n=e^{\frac{u_0}{u_0+1}}\times e^{\frac{u_1}{u_1+1}}\times\ldots\times e^{\frac{u_n}{u_n+1}}$

عين S_n و T_n بدلالة n ، هل المتتالية (T_n) متقاربة؟ برر إجابتك

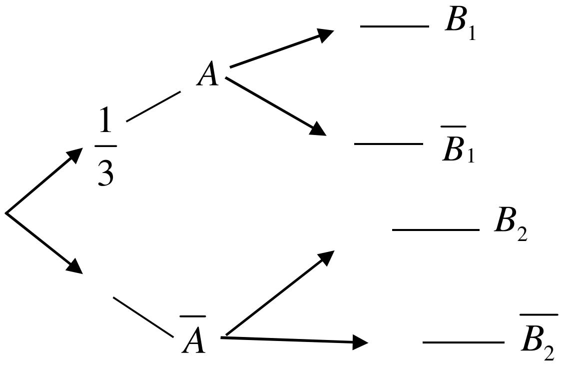
➢ التمرين الثالث(04 نقاط) :

(I) نعتبر وعاء U_1 يضم 6كريات مرقمة كما يلي 1 ، 1 ، 1 ، 1 ، 3 و 4 ،وعاء U_2 يضم 4 كريات مرقمة 1 ، 2 ، 3 و 4

نسحب من علبة تضم 6 بطاقات مرقمة من 1 إلى 6 ،بطاقة واحدة إذا ظهر الرقم 3 أو 5 نسحب كرية واحدة من الوعاء U_1 أما إذا ظهر رقم آخر فإننا نسحب كرية واحدة من الوعاء U_2

(الكريات متماثلة لا نميز بينها باللمس)

نعتبر الاحداث : A : "اختيار العلبة U_1" ، B_1 : "سحب كرية تحمل الرقم 1 من العلبة U_1"
و B_2 : "سحب كرية تحمل الرقم 1 من العلبة U_2"



1) أنقل و أكمل شجرة الاحتمالات

2) أحسب احتمال الحدث B : "سحب كرية تحمل الرقم 1"

(II) نجمع الآن الكريات في وعاء واحد U_3

نسحب عشوائيا من الوعاء U_3 ثلاث كريات في آن واحد

1) أحسب احتمال الحصول على

أ. الكريات الثلاث تحمل أرقام فردية

ب. كرية على الأقل من الكريات الثلاث تحمل رقما فرديا

جـ. كرية على الأكثر من الكريات الثلاث تحمل رقما فرديا

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب، عدد الكريات التي تحمل الرقم 1

عين قانون المتغير العشوائي X ، ثم أحسب $E(1900X - 1965)$

➢ **التمرين الرابع(07 نقاط):**

(I) g هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x) = x^2 + 3 - 2\ln x$

1) ادرس تغيرات الدالة g.

2) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

(II) f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{x^2-1}{2x}$

نسمي (C_f) المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا: $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f

2) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ ، فسر النتيجة المحصل عليها هندسيا

3) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ، ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f

4) ليكن (D) المستقيم الذي معادلته $y = \frac{1}{2}x$

أ. احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x \right]$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

ب. أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (D)

5) أ. أنشئ المستقيم (D) والمنحنى (C_f).

ب. أحسب S مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $y = \frac{x}{2}$ ، $x = 1$ ، $x=e$

6)نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1-x^2}{|x|} - \frac{\ln x^2}{|x|} \right]$ ، نسمي (C_h) المنحنى الممثل لها

أ.بين أن h دالة زوجية

ب. اشرح كيفية رسم المنحنى (C_h)، أرسم (C_h) في المعلم السابق .

انتهى

✓ **التمرين الأول :**

1) الاقتراح الصحيح هو أ) ، لأن :

الدّالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=e^{2x}-3e^{x}$ أي أن $f'(x)=e^{x}\left(e^{x}-3\right)$

وبما أن من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^{x}>0$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة الدالة $e^{x}-3$ ، وعليه :

$f'(x)\geq 0$ تكافئ $e^{x}-3\geq 0$ ومنه $f'(x)\geq 0$ تكافئ $e^{x}\geq 3$ أي أن $f'(x)\geq 0$ تكافئ $x\geq \ln 3$

نستنتج أن $f'(x)<0$ تكافئ $x<\ln 3$ ، وبالتالي الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;\ln 3[$ و بما أن $[0;\ln 2]$

محتوى في $]-\infty;\ln 3[$ فإن الدالة f متناقصة تماما على $[0;\ln 2]$

2) الاقتراح الصحيح هوجـ) ، لأن :

$m=\dfrac{1}{\frac{4\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}}\displaystyle\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} g(x)\,dx$ ومنه $m=\dfrac{1}{\frac{2\pi}{3}}\displaystyle\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}\cos x\,dx$ إذن $m=\dfrac{3}{2\pi}\left[\sin x\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}$ وعليه $m=\dfrac{3}{2\pi}\left[\sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)-\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right]$

ينتج أن $m=\dfrac{-3\sqrt{3}}{2\pi}$

3) الاقتراح الصحيح هو ب) ، لأن :

من أجل كل عدد طبيعي n: $S_n=e^{u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n}$ وبما أن المتتالية (u_n) حسابية فإن

$u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n=\dfrac{n+1}{2}(u_0+u_n)$ وبما أن $u_0=1$ و $u_n=1+2n$ فإن $u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n=\dfrac{n+1}{2}(2+2n)$

أي أن $u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n=(n+1)^2$ و بالتالي $S_n=e^{(n+1)^2}$

4) الاقتراح الصحيح هوجـ) ، لأن :

بما أن السحب يتم على التوالي مع الإرجاع فإننا نوظف قوائم و عليه :

- عدد الحالات الممكنة هي 10^5 : عدد الحالات المواتية للحدث A هي $\left(6^3\times 4^2\right)\times C_5^3\times C_2^2=34560$

ينتج أن : $P(A)=\dfrac{34650}{100000}=\dfrac{216}{625}$

✓ **التمرين الثاني :**

1) من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1}=\dfrac{a(u_n+3)+b}{u_n+3}=\dfrac{au_n+3a+b}{u_n+3}$ و بما أن $u_{n+1}=\dfrac{u_n-1}{u_n+3}$

فإن $a=1$ و $3a+b=-1$ ومنه $a=1$ و $b=-4$ ينتج أن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1}=1-\dfrac{4}{u_n+3}$

طريقة ثانية :

من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1}=\dfrac{u_n+3-4}{u_n+3}$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1}=\dfrac{u_n+3}{u_n+3}-\dfrac{4}{u_n+3}$

ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1}=1-\dfrac{4}{u_n+3}$

2) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $-1<u_n\leq 0$:

أ.من أجل $n=0$: $-1<u_0\le 0$ محققة لأن $u_0=0$

ب.ليكن n عدد طبيعي كيفي، لنفرض أن $-1<u_n\le 0$ و لنبرهن $-1<u_{n+1}\le 0$

بما أن فرضا $-1<u_n\le 0$ فإن $2<u_n+3\le 3$ ومنه $\frac{1}{3}\le\frac{1}{u_n+3}<\frac{1}{2}$ إذن $\frac{4}{3}\le\frac{4}{u_n+3}<2$ ينتج أن

$-\frac{4}{3}\le-\frac{4}{u_n+3}<-2$ وعليه $-1<1-\frac{4}{u_n+3}\le-\frac{1}{3}$ و بما أن $u_{n+1}=1-\frac{4}{u_n+3}$ فإن $-1<u_{n+1}\le-\frac{1}{3}$ أي أن

$-1<u_{n+1}\le 0$. من أ. و ب. ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $-1<u_n\le 0$

3) دراسة اتجاه تغير المتتالية العددية (u_n) :

ليكن n عدد طبيعي، لدينا: $u_{n+1}-u_n=1-\frac{4}{u_n+3}-u_n$ ومنه $u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n^2-2u_n-1}{u_n+3}$

إذن $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n+1)^2}{u_n+3}$. بما أن $2<u_n+3\le 3$ فإن $u_n+3>0$ و $-(u_n+1)^2<0$

وعليه $u_{n+1}-u_n<0$ ينتج أن (u_n) متناقصة تماما

- استنتاج أن (u_n) متقاربة: بما أن (u_n) متناقصة تماما و محدودة من أسفل بالعدد -1 فإنها متقاربة

4) أ. نبين أن (v_n) متتالية حسابية:

ليكن n عدد طبيعي، لدينا: $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}+1}-\frac{1}{u_n+1}$ و بما أن $u_{n+1}+1=2-\frac{4}{u_n+3}=\frac{2u_n+2}{u_n+3}$

فإن $\frac{1}{u_{n+1}+1}=\frac{u_n+3}{2(u_n+1)}$ ومنه $v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3}{2(u_n+1)}-\frac{1}{u_n+1}$ ينتج أن $v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3}{2(u_n+1)}-\frac{2}{2(u_n+1)}$

وعليه $v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+1}{2(u_n+1)}$ أي أن $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{2}$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0=\frac{1}{u_0+1}=1$

ب.تعيين v_n ثم u_n بدلالة n :

- بما أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0=1$ فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_n=1+\frac{1}{2}n$
- بما أن $v_n=\frac{1}{u_n+1}$ فإن $u_n+1=\frac{1}{v_n}$ ومنه $u_n=\frac{1}{v_n}-1$ و بما أن $v_n=\frac{n+2}{2}$ فإن $u_n=\frac{2}{n+2}-1=\frac{-n}{n+2}$
- استنتاج ثانية أن (u_n) متقاربة :

بما أن $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{-n}{n}=-1$ فإن المتتالية (u_n) متقاربة

5) أ. حساب S_n بدلالة n: لدينا $S_n=u_0v_0+u_1v_1+...+u_nv_n$.

لنضع $u_nv_n=\omega_n$ ، نجد $S_n=\omega_0+\omega_1+...+\omega_n$

بما أن $u_n=\frac{1}{v_n}-1$ فإن $\omega_n=1-v_n$ ومنه $S_n=1-v_0+1-v_1+...+1-v_n$

إذن $S_n=(1+1+...+1)-(v_0+v_1+...+v_n)$ ومنه $S_n=(n+1)-S_n'$ مع $S_n'=v_0+v_1+...+v_n$

إن S'_n هومجموع $n+1$ حد متتابع من المتتالية الحسابية (v_n) وعليه $S'_n=\frac{n+1}{2}(v_0+v_n)$ ومنه $S'_n=\frac{n+1}{2}\left(2+\frac{1}{2}n\right)$

ينتج أن $S_n=(n+1)-\frac{(n+1)(n+4)}{4}$ أي أن $S_n=\frac{-n(n+1)}{4}$

ب. حساب T_n بدلالة n :

لدينا $\frac{u_n}{u_n+1}=\frac{u_n+1-1}{u_n+1}$ ومنه $\frac{u_n}{u_n+1}=1-\frac{1}{u_n+1}$ وبما أن $u_n+1=\frac{1}{v_n}$ فإن $v_n=\frac{1}{u_n+1}$

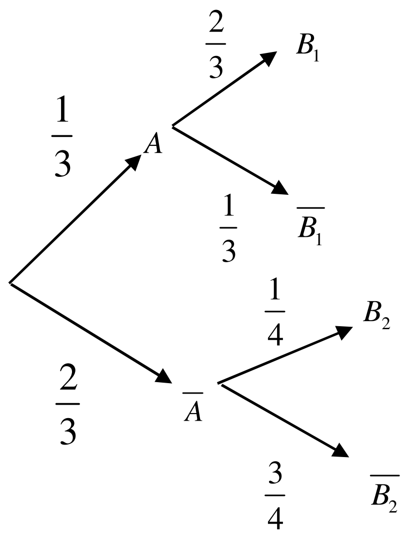
ومنه $\frac{u_n}{u_n+1}=1-v_n$ أي أن $\frac{u_n}{u_n+1}=\omega_n$ و عليه $T_n=e^{\omega_0}\times e^{\omega_1}\times\ldots\times e^{\omega_n}$ ومنه $T_n=e^{\omega_0+\omega_1+\ldots+\omega_n}$

إذن $T_n=e^{S_n}$ أي أن $T_n=e^{\frac{-n(n+1)}{4}}$

- المتتالية (T_n) متقاربة لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$

✓ **التمرين الثالث:** (I)

1) نقل و إكمال شجرة الاحتمالات :



2) حساب $p(B)$ احتمال الحدث B : حسب دستور الاحتمالات الكلية فإن $p(B)=p(A\cap B_1)+p(\overline{A}\cap B_2)$

إذن $p(B)=p(A)\times p_A(B_1)+p(\overline{A})\times p_{\overline{A}}(B_2)$ ومنه $p(B)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{7}{18}$

(II) بما أن السحب يتم في آن واحد فإننا نوظف توفيقات

عدد السحبات الكلية هو $C_{10}^3=120$

1) أ . عدد الحالات المواتية للحدث A_1 هو $C_7^3=35$ ومنه $p(A_1)=\frac{35}{120}$ أي أن $p(A_1)=\frac{7}{24}$

ب. عدد الحالات المواتية للحدث A_2 هو $(C_7^1\times C_3^2)+(C_7^2\times C_3^1)+C_7^3=119$ ومنه $p(A_2)=\frac{119}{120}$

طريقة ثانية: الحدث A_2 هو الحدث المعاكس للحدث $\overline{A_2}$: الكرات الثلاثة لا تحمل رقما فرديا

عدد الحالات المواتية للحدث $\overline{A_2}$ هو $C_3^3=1$ ومنه $p(\overline{A_2})=\frac{1}{120}$ إذن $p(A_2)=1-p(\overline{A_2})=\frac{119}{120}$

جـ. عدد الحالات المواتية للحدث A_3 هو $(C_7^1\times C_3^2)+C_3^3=22$ ومنه $p(A_3)=\frac{22}{120}$ أي أن $p(A_3)=\frac{11}{60}$

2) أ. قيم المتغير العشوائي X هي : 0 ، 1 ، 2و 3

ب. قانون المتغير العشوائي X : $p(X=0)=\frac{C_3^3}{120}$ أي أن $p(X=0)=\frac{1}{120}$

$p(X=1)=\frac{C_7^1\times C_3^2}{120}$ أي أن $p(X=1)=\frac{21}{120}=\frac{7}{40}$

$p(X=2)=\frac{C_7^2\times C_3^1}{120}$ أي أن $p(X=2)=\frac{63}{120}=\frac{21}{40}$

$p(X=3)=\frac{C_7^3}{120}$ أي أن $p(X=3)=\frac{35}{120}=\frac{7}{24}$

$(X=x_i)$	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{120}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{24}$

جـ. حساب $E(1900X-1965)$: لدينا $E(1900X-1965)=1900E(X)-1965$

لنحسب $E(X)$: لدينا $E(X)=\left(0\times\frac{1}{120}\right)+\left(1\times\frac{7}{40}\right)+\left(2\times\frac{21}{40}\right)+\left(3\times\frac{7}{24}\right)$ ومنه $E(X)=\frac{21}{10}$

ينتج أن $E(1900X-1965)=1900\times\frac{21}{10}-1965$ ومنه $E(1900X-1965)=2025$

✓ التمرين الرابع:

(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g :

أ. حساب النهايات على أطراف المجال $]0;+\infty[$

- $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g(x)=+\infty$ لأن : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} \ln x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}(x^2+3)=3$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{x^2+3}{x}-2\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$ لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{x}=+\infty$

ب.دراسة اتجاه تغير الدالة g :

الدالة قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ومن أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $g'(x)=2x-\frac{2}{x}$ ومنه $g'(x)=\frac{2(x-1)}{x}$

إن إشارة $g'(x)$ من إشارة $x-1$ لأن $x>0$ و منه إشارة $g'(x)$ تعطى بـ

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $]0;1]$

جدول التغيرات :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

2)ينتج من دراسة تغيرات الدالة g أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $g(x)\geq g(1)$ وبما أن $g(1)>0$
فإن من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$

(II)

1) الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ومن اجل كل x من $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)\times x-\ln x}{x^2}+\frac{2x\times 2x-2\left(x^2-1\right)}{4x^2}$$ ومنه $$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}+\frac{2x^2+2}{4x^2}=\frac{6+2x^2-4\ln x}{4x^2}$$

أي أن $f'(x)=\dfrac{3+x^2-2\ln x}{2x^2}=\dfrac{g(x)}{2x^2}$

- استنتاج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;+\infty[$:

بما أنه من اجل كل x من $]0;+\infty[$: $2x^2>0$ و $g(x)>0$ فإن من اجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)>0$
و عليه الدالة f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=-\infty$ لأن : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{x^2-1}{2x}=-\infty$

- التفسير الهندسي : المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=0$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2}=+\infty$

- جدول التغيرات :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

4) أ. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\dfrac{1}{2}x\right)$ و تفسيرها بيانيا :

لدينا $f(x)-\dfrac{1}{2}x=\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{x^2-1}{2x}-\dfrac{1}{2}x$ و منه $f(x)-\dfrac{1}{2}x=\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2x}-\dfrac{x}{2}$ أي أن $f(x)-\dfrac{1}{2}x=\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{1}{2x}$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2x}\right)=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\dfrac{1}{2}x\right)=0$. ومنه المستقيم (D) مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$

ب. دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (D):

لنعين إشارة $f(x)-\dfrac{1}{2}x$: لدينا $f(x)-\dfrac{1}{2}x=\dfrac{2\ln x-1}{2x}$ و بما أن $x>0$ فإن إشارة $f(x)-\dfrac{1}{2}x$ من إشارة $(2\ln x-1)$

لدينا $2\ln x-1\geq 0$ تكافئ $\ln x\geq\dfrac{1}{2}$ أي أن $2\ln x-1\geq 0$ تكافئ $x\geq e^{\frac{1}{2}}$ ينتج أن $2\ln x-1<0$ تكافئ $x<e^{\frac{1}{2}}$

و بالتالي لما $x\in\left]\sqrt{e};+\infty\right[$: المنحني (C_f) يقع أعلى المستقيم (D)

لما $x\in\left]0;\sqrt{e}\right[$: المنحني (C_f) يقع أسفل المستقيم (D)

لما $x=\sqrt{e}$: المنحني $\left(C_f\right)$ يقطع (D) في النقطة $\omega\left(\sqrt{e};\frac{\sqrt{e}}{2}\right)$

5) أ. إنشاء المستقيم (D) و المنحني $\left(C_f\right)$ في نهاية حل التمرين

ب. حساب المساحة S : بتوظيف الوضع النسبي للمنحني $\left(C_f\right)$ و المستقيم (D) نجد أن

$S=\int_1^{\sqrt{e}}\left(\frac{1}{2}x-f(x)\right)dx+\int_{\sqrt{e}}^{e}\left(f(x)-\frac{1}{2}x\right)dx$ ومنه $S=\int_1^{\sqrt{e}}\left(\frac{1}{2x}-\frac{\ln x}{x}\right)dx+\int_{\sqrt{e}}^{e}\left(\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{2x}\right)dx$

إذن $S=\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{e}}\frac{1}{x}dx-\int_1^{\sqrt{e}}\frac{1}{x}\times\ln x\,dx+\int_{\sqrt{e}}^{e}\frac{1}{x}\times\ln x\,dx-\frac{1}{2}\int_{\sqrt{e}}^{e}\frac{1}{x}dx$

ومنه $S=\frac{1}{2}[\ln x]_1^{\sqrt{e}}-\frac{1}{2}\left[(\ln x)^2\right]_1^{\sqrt{e}}+\frac{1}{2}\left[(\ln x)^2\right]_{\sqrt{e}}^{e}-\frac{1}{2}[\ln x]_{\sqrt{e}}^{e}$ ، نجد بعد التعويض :

$S=\frac{1}{8}$ (وحدة المساحات)

6) أ. دراسة شفعية الدالة h :

من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ؛ $-x\in\mathbb{R}^*$ و $h(-x)=h(x)$ لأن $|-x|=|x|$ و $(-x)^2=x^2$ ومنه h دالة زوجية

ب. من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ؛ $|x|=x$ و $\ln x^2=2\ln x$ ومنه $h(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1-x^2}{x}-\frac{2\ln x}{x}\right)$

أي أن $h(x)=\frac{1-x^2}{2x}-\frac{\ln x}{x}$ إذن $h(x)=-\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{x^2-1}{2x}\right)$ و بالتالي إذا كان $x>0$ ؛ $h(x)=-h(x)$

ينتج من هذا أنه في المجال $]0;+\infty[$ نرسم (C_h) نظير $\left(C_f\right)$ بالنسبة إلى حامل محور الفواصل ثم نكمل الرسم إلى المجال $]-\infty;0[$ بالتناظر بالنسبة إلى حامل محور التراتيب لأن الدالة h دالة زوجية